Quiero demostrar que $LI \Longleftrightarrow \det(A) \neq 0$.

1.12) $\{v_i : i \in I_m\} = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ LI

$A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^{m \times m} \rightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$

$\begin{cases} j \in I_m \\ w_j := \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i \end{cases} \rightarrow \{w_j : j \in I_m\} = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$

Ecuación 1

I $\boxed{\beta_1 w_1 + \dots + \beta_m w_m = 0_V}$

Sabemos que

$\begin{cases} w_1 = a_{11} v_1 + \dots + a_{m1} v_m \\ \vdots \\ w_m = a_{1m} v_1 + \dots + a_{mm} v_m \end{cases}$

$\rightarrow$ en I $\rightarrow \beta_1 . (a_{11} v_1 + \dots + a_{m1} v_m) + \dots + \beta_m (a_{1m} v_1 + \dots + a_{mm} v_m) = 0.$

$\rightarrow v_1 . (\beta_1 a_{11} + \dots + \beta_m a_{1m}) + \dots + v_m (\beta_1 a_{m1} + \dots + \beta_m a_{mm}) = 0.$

Como $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ es LI

$\begin{cases} \beta_1 a_{11} + \dots + \beta_m a_{1m} = 0 \\ \vdots \\ \beta_1 a_{m1} + \dots + \beta_m a_{mm} = 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}$

II

IDA
$\rightarrow$

Por hipótesis $\{w_j : j \in I_m\}$ es LI.

Entonces en I : $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_m = 0$.

Entonces II tiene solución única $\rightarrow$ A tiene inversa $\rightarrow$ $det(A) \neq 0$ ✓

VUELTA
$\leftarrow$

Por hipótesis $det(A) \neq 0$.

Entonces A tiene inversa $\rightarrow$ II tiene solución única.

Es decir: $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_m = 0 \rightarrow \{w_j : j \in I_m\}$ es LI ✓

Por lo tanto, si LI $\rightarrow$ $det(A) \neq 0$ y si $det(A) \neq 0 \rightarrow$ LI, entonces

$\boxed{LI \leftrightarrow det(A) \neq 0}$.